

Trippelkorrelasjonen  $\overline{u'_i u'_i u'_j}$  og trykk-fart-korrelasjonen  $\overline{u'_j p'}$ . Desse ledda verkar diffusivt. Dei er ukjende og  $D_{k,t}$  må modellerast. Det viskøse gradientleddet  $D_{k,v}$  («diffusjon») kan vi rekne ut, det inneheld ingen nye ukjende. Ved høge reynoldstal er det lite i høve til den turbulensdiffusjonen. Produksjonsleddet  $P_k$  inneheld berre storleikar som vi har frå før. Det kan reknast ut når vi har modellert reynoldsspenningane. Dissipasjonsleddet  $\epsilon$  må modellerast.

### 3.3 Modellering av turbulensenergi-likninga

Dette avsnittet er om modellering av  $k$ -likninga. Det legg opp til å presentere modellar som har berre denne eine likninga;  $k$ -likningsmodellar. Men denne likninga tek vi med oss over i  $k$ - $\epsilon$ -modellen. Såleis vert dette avsnittet ein del av utgreiinga av  $k$ - $\epsilon$ -modellen i neste avsnitt.

#### Turbulensdiffusjon: Gradientmodell

Diffusjonsleddet  $D_{k,t}$  inneheld to storleikar som er ukjende, og som må modellerast. I kapittel 5 skal vi sjå på korleis vi kan modellere turbulensdiffusjon med ein gradientmodell. Det vert ein analogi til Ficks lov som er ein modell for massefluks, sjå likning (A.18) side 202. For fluksen av turbulensenergi kan vi bruke ein slik gradientmodell:

$$\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}. \quad (3.6)$$

Dette vert tolka på to måtar:

- 1) som modell for  $(-\frac{1}{2}\overline{\rho u'_j u'_i u'_i} - \overline{p' u'_j})$ , eller
- 2) som modell for  $-\frac{1}{2}\overline{\rho u'_j u'_i u'_i}$ , då vert  $\overline{p' u'_j}$  neglisjert.

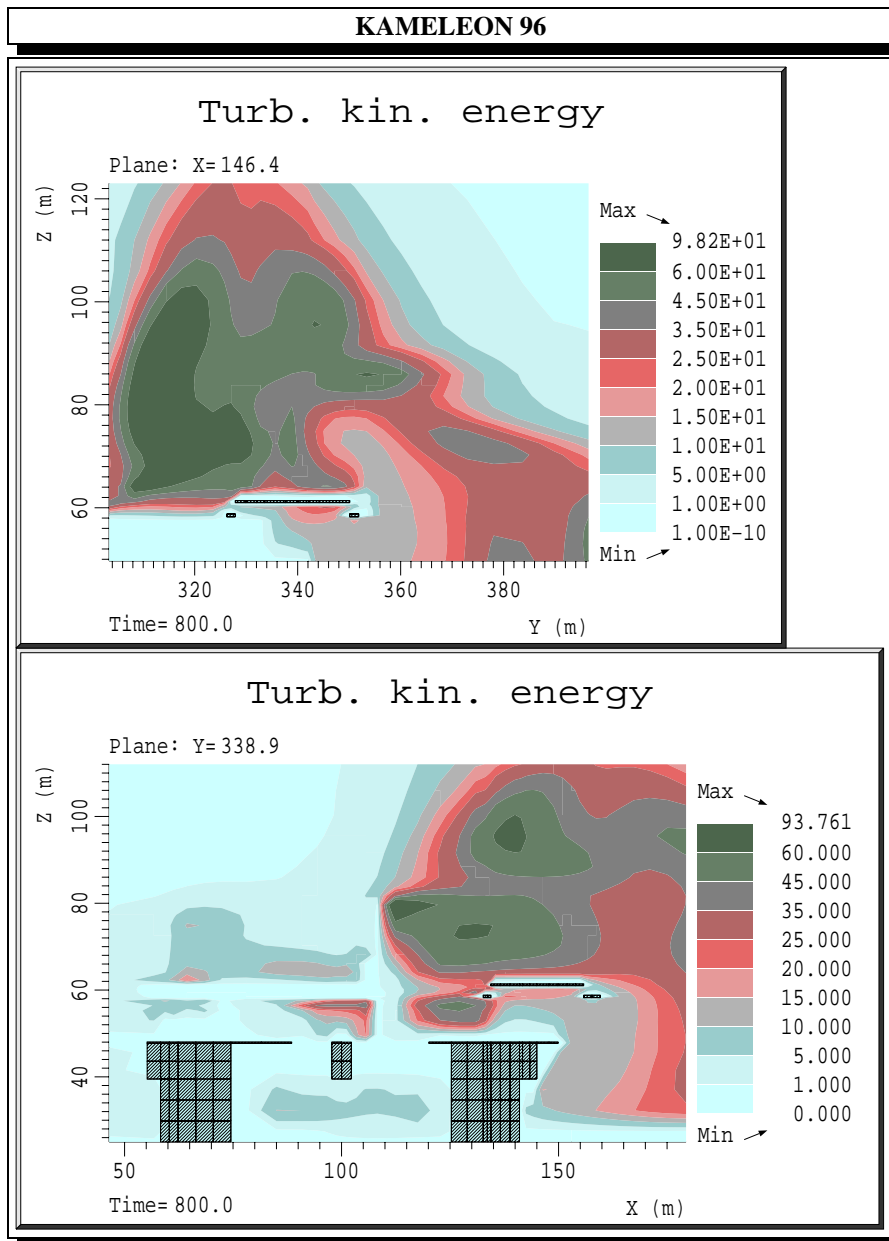
Bakgrunnen for og konsekvensane av dei to tolkingane skal vi ikkje gå inn på her. I praksis gjev dei einstyndande resultat. Diffusjonsmodellen vert altså

$$\rho D_{k,t} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right). \quad (3.7)$$

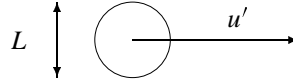
Vi skal kome attende til gradientmodellen for turbulensdiffusjon i avsnitt 5.2.

#### Dissipasjon

Prandtl (1945) ser føre seg ein «turbulensball» i ei strøyming. Han føreset høgt reynoldstal for strøyminga. Ballen har lengdeskala  $L$  (blandingsveg) og fartsskala  $u'$  (fart i høve til omgjevnadene; fluktuasjon).



**Figur 3.1:** Turbulensenergi frå ei numerisk simulering av strøyming omkring plattform. Bak boretårnet lagar vinden (25 m/s) ei vake over helikopterdekket. Store fartsgradientar gjev mykje turbulens og dette påverkar innflygingstilhøva for helikopteret. Figurane viser turbulensenergien i loddrette plan på tvers og på langs gjennom helikopterdekket. Figur 2.1(f) side 32 viser eit perspektiv av den tredimensjonale plattformmodellen.



Motstanden mot rørsla må vere  $F \sim \rho u'^2 \cdot A \sim \rho u'^2 \cdot L^2$ . (Jamfør uttrykket for slepekraft eller «drag».) Motstandsarbeid per tidseining, effekt, er  $F \cdot u' \sim \rho u'^3 \cdot L^2$ . Dette er energitap for den «ballen» vi ser på. Dividert på volumet  $V \sim L^3$  vert det

$$\rho\varepsilon \sim \rho \frac{u'^3}{L}, \quad (3.8)$$

og med  $u' \sim \sqrt{k}$  får Prandtl

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L}. \quad (3.9)$$

Her er  $C_D$  ein konstant talverdi som må finnast frå eksperiment. Dimensjonsanalyse, med fartsskala  $u' \sim \sqrt{k}$  og lengdeskala  $L$ , gjev også  $\varepsilon \sim u'^3/L \sim k^{3/2}/L$ .

Denne lengdeskalaen,  $L$ , er ein *blandingsveg* eller karakteristisk lengdeskala for dei større kvervlane. Han er ikkje identisk med lengdeskalaen i Prandtl's blandingsvegmodell. Dei er av same storleiksrorden.

### Turbulensviskositet

Vi kan sjå på turbulensviskositeten som eit produkt av karakteristisk fartsskala og karakteristisk lengdeskala for turbulensen:  $\nu_t \sim u' \cdot \ell'$ . Dette kan vi tenkje som ein analogi til modellen for molekylær viskositet i kinetisk gassteori, jamfør side 40 og 39. Med  $u' \sim \sqrt{k}$  og  $\ell' = L$  har vi

$$\nu_t = C_L \sqrt{k} L \quad (3.10)$$

der  $C_L$  er ein konstant talverdi. Dette gjev oss reynoldsspenningane ved hjelp av likning (2.14).

Dei to konstantane  $C_D$  og  $C_L$  er ikkje uavhengige. Frå måledata kan ein setje  $C_D \cdot C_L$  til om lag 0,08–0,11. Verdien 0,09 er mest brukt. Vi kan velje ein av konstantane lik 1.

### Modellert likning for $k$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \rho P_k - \rho \varepsilon, \quad (3.11)$$

$$\rho P_k = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}, \quad (3.12)$$

$$\mu_t = \rho \nu_t = \rho \sqrt{k} L, \quad (3.13)$$

$$\varepsilon = C_D \frac{k^{3/2}}{L}, \quad (3.14)$$

$$L = \dots [\text{algebraisk uttrykk}]. \quad (3.15)$$

Modellar med éi likning for ein turbulens-storleik vert kalla eilikningsmodellar. Slike  $k$ -likningsmodellar er noko nytta for særlege tilfelle. På grunn av det empiriske uttrykket for  $L$  vert det ofte sagt at ein eilikningsmodell ikkje er monaleg betre enn ein blandingsvegmodell. Dette gjeld i somme tilfelle, men ikkje alltid. Alternativet kan vere å løyse ei likning for å finne lengdeskalaen. Det er ein framgangsmåte som er meir generell. Men i visse tilfelle gjev ein spesiell funksjon for  $L$  betre resultat enn ei meir generell likning.

### 3.4 $k$ - $\varepsilon$ -modell

$k$ - $\varepsilon$ -modellen har éi likning for turbulensenergien  $k$  og éi likning for dissipasjonen  $\varepsilon$ . Modell-likninga for  $k$  er det gjort greie for i førre avsnittet. Det bør lesast først.

I staden for eit algebraisk uttrykk, kan vi løyse ei transportlikning for å finne ein lengdeskala. Likninga kan vere for sjølve lengdeskalaen, eller for ein storleik  $k^m \ell^n$  ( $n \neq 0$ ). Det finst mange modellframlegg med ulike verdiar for  $m$  og  $n$ . Den mest vanlege, og nesten einerådande, er ein modell med likning for dissipasjonsleddet  $\varepsilon$ , altså  $m = 3/2$  og  $n = -1$ .

#### Modell-likning for $\varepsilon$

Ei likning for  $\varepsilon$  kan utleiast frå grunnlikningane (rørslemengdelikninga og kontinuitetslikninga). Men det er lite hjelp i denne «eksakte» likninga, bortsett frå at vi kan identifisere diffusjonsledd, produksjonsledd og nedbrytingsledd. Vi kan skrive

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon \bar{u}_j) = \rho D_\varepsilon + \rho P_\varepsilon - \rho Q_\varepsilon. \quad (3.16)$$

For diffusjonsleddet kan vi bruke ein gradientmodell, jamfør likning (3.7),

$$\rho D_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right). \quad (3.17)$$

Produksjon og nedbryting vert sett proporsjonal med produksjon og nedbryting av  $k$ . Ledda må gongast med  $\varepsilon/k$  for å få rett dimensjon:

$$P_\varepsilon = C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k \quad (3.18)$$

og

$$Q_\varepsilon = C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} \varepsilon. \quad (3.19)$$

Tanken bak eit slikt jamhøve er at når det vert meir å ta av, aukar uttaket. Når mengda av turbulensenergi aukar, vil nedbrytinga også auke;  $\varepsilon$  må auke når  $k$  aukar. Likeins når det vert mindre å ta av, må uttaket minke. Når  $P_k$  aukar, bør  $\varepsilon$  auke, elles kan  $k$  vekse over alle grenser. Auke i  $\varepsilon$  får ein ved å auke  $P_\varepsilon$  – difor er det fornuftig å gjere  $P_\varepsilon$  avhengige av  $P_k$ . Det same argumentet kan først for samhovet mellom nedbrytinga  $Q_\varepsilon$  og dissipasjonen (nedbrytinga)  $\varepsilon$ .

#### Standard $k$ - $\varepsilon$ -modell:

Turbulensviskositet:

$$\mu_t = \rho \nu_t = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}. \quad (3.20)$$

Reynoldsspenningane:

$$-\rho \overline{u'_i u'_j} = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \rho k \delta_{ij}. \quad (3.21)$$

Vi løyser to modellerte likningar:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + \rho P_k - \rho \varepsilon, \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \varepsilon \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \left( \mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \rho P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon}{k} \rho \varepsilon, \quad (3.23)$$

der

$$\rho P_k = \mu_t \left( \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}. \quad (3.24)$$

Konstantane i modellen (frå Launder og Spalding, 1974):

$$\sigma_k = 1,0 \quad \sigma_\varepsilon = 1,3 \quad C_{\varepsilon 1} = 1,44 \quad C_{\varepsilon 2} = 1,92 \quad C_\mu = 0,09 \quad (3.25)$$

Første publiseringa av ein  $k$ - $\varepsilon$ -modell var ved Jones og Launder (1972). Det var ein modell som også kunne rekne strøymingar med låge reynoldstal. Talverdiane for konstantane vart noko justerte, og den mest brukte versjonen er publisert av Launder og Spalding (1974). Modellen er utvikla for «inkompressibel strøyming», her vil det seie strøyming med konstant tettleik (jamfør side 26).

Denne modellversjonen, likning (3.20)–(3.25) med konstantar som vist her, har fått status som «standard»  $k$ - $\varepsilon$ -modell for høge reynoldstal. Sjå elles side 45 og drøfting av konstantane og  $\varepsilon$ -likninga i Ertesvåg (1991:45). Vi kjem attende til konstant-verdiane i avsnitt 4.5.

Legg merke til at her reknar vi tettleiken konstant. Difor har det falle bort eit ledd i modellen for reynoldsspenning, likning (3.21). Dersom vi let  $\rho$  variere, til dømes med temperaturen, må vi bruke uttrykket i likning (2.14). Av di reynoldsspenningane går inn i produksjonsleddet  $P_k$ , vert det også ekstra ledd i likning (3.24) og likning (3.12). Når tettleiken varierer, vert det også eit ledd med ein trykk-tøyingsfart-korrelasjon i  $k$ -likninga. Dette leddet er null når tettleiken er konstant, og vert oftast sett bort frå elles.

### $k$ - $\varepsilon$ -modell for forbrenning

Tettleiken  $\rho$  er ikkje konstant i forbrenning – tvert imot, variasjonane kan vere svært store. Då kan vi bruke masse-vegne (masse-midla) storleikar, sjå tillegg B. Likningane for masse, rørslemengd og energi vert stort sett dei same, med nokre avvik (som oftast vert neglisjerte), avsnitt B.2–B.5.

Ein  $k$ - $\varepsilon$ -modell kan framleis sjå ut om lag som likning (3.20)–(3.25) framanfor. For å markere at det er masse-vegne storleikar, kan vi skrive  $\tilde{k}$  og  $\tilde{\varepsilon}$ . Det vert eit par viktige tillegg: I uttrykket for reynoldsspenningane, likning (2.14), fell det bort eit ledd når tettleiken  $\rho$  er konstant, som i likning (3.21). Dette leddet må vere med, og vi får:

$$-\overline{\rho u'_i u'_j} = -\tilde{\rho} \tilde{u}'_i \tilde{u}'_j = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left( \tilde{\rho} \tilde{k} + \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \delta_{ij}. \quad (3.26)$$

Dette skal vere med i produksjonsleddet, slik at

$$\tilde{\rho} P_k = \mu_t \left( \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{u}_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \left( \tilde{\rho} \tilde{k} + \mu_t \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial x_l} \right) \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_i}. \quad (3.27)$$

Vidare har vi eit trykkledd og ein korrelasjon mellom trykk og tøyingsfart i  $\tilde{k}$ -likninga, sjå likning (B.42). Desse må modellerast, men det har ikkje kome fram nokon modell som har fått stor utbreiing. Ofte vert det sett bort frå desse ledda. Til sist kan vi ta med at det viskøse diffusjonsleddet ikkje utan vidare kan uttrykkjast som eit gradientledd, men at vi modellerer det slik, likevel.

### Grenseverdiar

For grenser inn mot faste veggjar brukar vi ofte vegglover. Dette kjem vi attende til i avsnitt 4.4.

Ved symmetrilinjer eller -plan har både  $k$  og  $\varepsilon$  null gradient og er symmetriske om linja eller planet.