

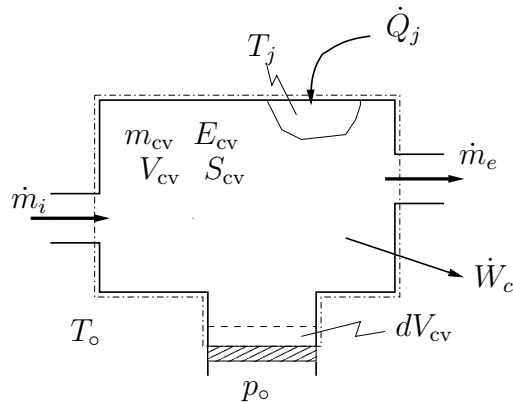
Likningar for masse, energi, entropi og eksergi

Ivar S. Ertesvåg
 Institutt for energi- og
 prosesssteknikk, NTNU
 ivar.s.ertesvag@ntnu.no

sept.2005/jan.2009
 Dette notatet ligg på
<http://folk.ntnu.no/ivarse/energi/balanse.pdf>

Dette er ei formelsamling. Likningane her er pensum fordi dei står i læreboka. Forklaringar står også der, dømes Moran og Shapiro (2006).

1 Oppsummering: Balansar på rate-form.



Skissa viser eit system med innløp og utløp (kan ha fleire), varmeoverføring til eit område med temperatur T_j ($j = 1, 2, \dots$), volumendring, og arbeid utført på aksling e.likn. Forklaringar til likningar og symbol kjem i avsnitta etterpå.

Massebalanse:

$$\frac{dm_{cv}}{dt} = \sum_{\text{innløp}} \dot{m}_i - \sum_{\text{utløp}} \dot{m}_e \quad (1)$$

Energibalanse:

$$\frac{dE_{cv}}{dt} = \sum_{\text{innløp}} \dot{m}_i (h_i + \frac{1}{2} \vec{V}_i^2 + gz_i) - \sum_{\text{utløp}} \dot{m}_e (h_e + \frac{1}{2} \vec{V}_e^2 + gz_e) + \dot{Q}_{cv} - \dot{W}_{cv} \quad (2)$$

$$E_{cv} = U_{cv} + E_{\text{kin},cv} + E_{\text{pot},cv}$$

Entropibalanse:

$$\frac{dS_{cv}}{dt} = \sum_{\text{innløp}} \dot{m}_i s_i - \sum_{\text{utløp}} \dot{m}_e s_e + \sum_j \int_{T_j} \frac{\delta \dot{Q}_j}{T_j} + \dot{\sigma}_{cv} \quad (3)$$

Eksergibalanse:

$$\frac{d\mathcal{E}_{cv}}{dt} = \sum_{\text{innløp}} \dot{m}_i \varepsilon_{f,i} - \sum_{\text{utløp}} \dot{m}_e \varepsilon_{f,e} + \sum_j \int_{T_j} \left(1 - \frac{T_o}{T_j}\right) \delta \dot{Q}_j - \left(\dot{W}_{cv} - p_o \frac{dV_{cv}}{dt}\right) - T_o \dot{\sigma}_{cv} \quad (4)$$

$$\mathcal{E}_{cv} = (E - U_o)_{cv} + p_o (V - V_o)_{cv} - T_o (S - S_o)_{cv} + \mathcal{E}_{cv}^{\text{ch}},$$

$$\varepsilon_{f,i} = (h - h_o)_i - T_o (s - s_o)_i + \frac{1}{2} \vec{V}_i^2 + g(z - z_o)_i + \varepsilon_i^{\text{ch}}$$

Symbolliste

Latinske bokstavar

E	energi (indre, kinetisk, potensiell) [J]
e	$= E/m$, spesifikk energi [J/kg]
\mathcal{E}	eksergi [J]
\mathcal{E}^{ch}	kjemisk eksergi [J]
g	tyngdeakselerasjon [m/s^2]
h	$= u + pv$, spesifikk entalpi [J/kg]
h_o	$= h(T_o, p_o)$
m	masse [kg]
\dot{m}	massestraum (masserate) [kg/s]
p	trykk [Pa]
p_o	trykk i omgjevnader [Pa]
Q_j	varme overført til temperatur T_j ($j = 1, 2, \dots$) [J]
\dot{Q}_j	varmestraum (varmerate) overført ved temperatur T_j ($j = 1, 2, \dots$) [J/s]
S	entropi [J/K]
s	$= S/m$, spesifikk entropi [J/(kgK)]
s_o	$= s(T_o, p_o)$
T	temperatur [K]
T_o	temperatur i omgjevnader [K]
t	tid [s]
U	indre energi [J]
u	$= U/m$, spesifikk indre energi [J/kg]
u_o	$= u(T_o, p_o)$
\vec{V}	fart (vektor) [m/s]
V	volum [m^3]
v	$= V/m$, spesifikt volum [m^3/kg]
v_o	$= v(T_o, p_o)$
W	arbeid [J]
\dot{W}	arbeidsrate [J/s]
W_c, \dot{W}_c	arbeid, arbeidsrate utført gjennom aksling, stag, e.likn.
z	høgde over referansenivå [m]

Greske bokstavar

Δ	endring
δ	lita endring, lita mengde
ε	$= \mathcal{E}/m$, spesifikk eksergi [J/kg]
ε^{ch}	$= \mathcal{E}^{\text{ch}}/m$, spesifikk kjemisk eksergi [J/kg]

ε_f	spesifikk eksergi i massestraum [J/kg]
$\dot{\sigma}$	entropiproduksjonsrate [J/(sK)]

Merketeikn

cv	som gjeld for systemet (kontrollvolumet)
e	som gjeld innløp
i	som gjeld innløp
\circ	gjeld ved tilstanden i omgjevnadene
kin	kinetisk (om energi)
pot	potensiell (om energi)

2 Omskriving av likningane for tilstandsending

Likningane ovanfor er skrivne på rate-form, altså at endring inne i og utveksling over grensa til CV er rekna per tidseining.

Ei tilstandsending har ein start og ein slutt. Det skjer ei endeleg endring frå tilstand (1) til tilstand (2) i CV, og det vert utveksla endelege mengder av masse, energi, entropi og eksergi.

Matematikken for omskrivinga er litt meir komplisert, men som hugseregelen kan vi seie at desse omskrivingane gjeld:

Derivert vert til endring: $\frac{d(\)_{cv}}{dt} \rightarrow \Delta(\)_{cv} = (\)_{cv,2} - (\)_{cv,1}$,
 altså det som er etter endringa minus det som var før.

Til dømes $\frac{dm_{cv}}{dt} [\text{kg/s}] \rightarrow \Delta m_{cv} = m_{cv,2} - m_{cv,1} [\text{kg}]$.

Straumar/rater (utveksling per tidseining) vert til endelege storleikar: $(\dot{\ }) \rightarrow (\)$,
 til dømes $\dot{m}_i [\text{kg/s}] \rightarrow m_i [\text{kg}]$, $\dot{Q}_j [\text{J/s}] \rightarrow Q_j [\text{J}]$

3 Ordbruk og presiseringar

Rate-form: "Rate" vert nytta om noko som gjeld eller vert rekna per tidseining. "Masse-rate" er masse per tidseining, "varmerate" er varme (energi) per tidseining, osv.

Innafor termodynamikk-pensumet held vi oss til jamne straumar av masse og energi. Der- som desse straumane varierer med tida, må vi trø litt varsomt med likningane – men det let seg godt gjere.

Tilstandsending: Vi har eit system som gjennomgår ein prosess slik at minst ein eigen- skap vert endra, til dømes trykk, temperatur, volum, eller masse. Prosessen har eit start-

punkt (ein starttilstand, -tidspunkt, -tilstand) og eit sluttspunkt (slutttilstand). Dette skjer over eit endeleg tidsrom, og det vert utveksla endelege mengder masse og energi.

System og kontrollvolum: Desse to orda vert nytta på litt ulike vis i lærebøker og annan litteratur, og mellom fagfolk – og ingen har monopol på “det rette”. (Moran & Shapiro gjev sin versjon i avsnitt 1.2).

Det enklaste er å seie at vi definerer ei **systemgrense** (kontrollvolum-grense, kontrollflate). Det som er innafor, er systemet (kontrollvolumet, “CV”). Her er det ei viss mengd stoff, som har masse, energi og andre eigenskapar. Masse og energi kan utvekslast over grensa.

Typer av system:

Den enklaste inndelinga er opne og lukka system. Lukka system utvekslar ikkje masse over systemgrensa. Ei særtilfelle er isolerte system; som korkje utvekslar energi eller masse.

Som likningsformene ovanfor, kan vi skilje mellom

- system med jamn endring, der vi reknar endring og utveksling per tidseining
- system med tilstandsending, altså frå start til slutt.

Begge desse systemtypene kan vere opne eller lukka.

Døme:

- 1) Varmevekslar, brennkammer og turbin i jamn drift er tre døme på opne system med jamne endringar (ofte lik null) og jamne stramar.
- 2) Når vi komprimerer gass inn i ein tank frå atmosfæren, er det ein endeleg prosess med start og slutt, og tanken vil vere eit opne system.
- 3) Ein avstengd tank med gass som vert tilført varme vil vere eit system med ein endeleg prosess, altså ei tilstandsending med start og slutt. Det er eit lukka system.
- 4) For ein damp-syklus i jamn drift kan vi legge systemgrensa slik at varme og arbeid vert utveksla over grensa (heteflater i kjel og kondensator), men ikkje masse. Då har vi eit lukka system med jamne endringar og jamne indre straumar.

“Jamn drift” kan vere ei viktig presisering. Ein turbin eller varmevekslar under oppstart er ikkje i jamn drift, men er ein prosess med endeleg endring. Ein bilmotor er sjeldan i jamn drift, medan ein skipsmotor eller eit kraftverk (med visse unnatak) vanlegvis er det.

4 Massebalansen

$$\underbrace{\frac{dm_{cv}}{dt}}_{(1)} = \underbrace{\sum_{\text{innløp}} \dot{m}_i}_{(2)} - \underbrace{\sum_{\text{utløp}} \dot{m}_e}_{(3)} \quad (5)$$

(1): tids-ending (auke, lagring) av masse i kontrollvolumet

(2): massestrøm inn i CV, summert over alle innløp

(3): massestrøm ut av CV, summert over alle utløp

5 Energibalanse

$$\underbrace{\frac{dE_{cv}}{dt}}_{(1)} = \underbrace{\sum_{\text{innløp}} \dot{m}_i (h_i + \frac{1}{2} \vec{V}_i^2 + gz_i)}_{(2)} - \underbrace{\sum_{\text{utløp}} \dot{m}_e (h_e + \frac{1}{2} \vec{V}_e^2 + gz_e)}_{(3)} + \underbrace{\dot{Q}_{cv}}_{(4)} - \underbrace{\dot{W}_{cv}}_{(5)} \quad (6)$$

(1): tids-endring (auke, lagring) av energi i CV, jf. likning (7)

(2): energirate med massestrøm inn i CV; entalpi, kinetisk og potensiell energi til massa som kryssar systemgrensa, summert over alle innløp

(3): energirate med massestrøm ut av CV

(4): varmerate tilført CV, jf. likning (9)

(5): arbeidsrate avgjeve frå CV, jf. likning (8)

Energien inne i kontrollvolumet kan skrivast ut som indre energi, kinetisk og potensiell energi til massen inne i CV:

$$E_{cv} = U_{cv} + E_{\text{kin},cv} + E_{\text{pot},cv} = m_{cv}(u + e_{\text{kin}} + e_{\text{pot}})_{cv} \quad (7)$$

Arbeidet er summen av arbeid på ein aksling, stag, e.likn, \dot{W}_c , og arbeid mot omgjevnadene (for å “dytte bort” atmosfæren med trykk p_o)

$$\dot{W}_{cv} = \dot{W}_c + p_o \frac{dV_{cv}}{dt} \quad (8)$$

Tilført varme er summen av alle varmestruamar inn til kontrollvolumet. Dersom dei varierer over ei overflate må dei integrerast over denne variasjonen.

$$\dot{Q}_{cv} = \sum_j \dot{Q}_j = \sum_j \int_{T_j} \delta \dot{Q}_j \quad (9)$$

Integrasjonen treng vi sjeldan tenkje på for energibalansen sin del, men han er med fordi vi av og til må tenkje slik for entropibalansen (nedanfor).

6 Entropibalanse

$$\underbrace{\frac{dS_{cv}}{dt}}_{(1)} = \underbrace{\sum_{\text{innløp}} \dot{m}_i s_i}_{(2)} - \underbrace{\sum_{\text{utløp}} \dot{m}_e s_e}_{(3)} + \underbrace{\sum_j \int_{T_j} \frac{\delta \dot{Q}_j}{T_j}}_{(4)} + \underbrace{\dot{\sigma}_{cv}}_{(5)} \quad (10)$$

(1): tids-endring (auke, lagring) av entropi i kontrollvolumet; $S_{cv} = m_{cv} s_{cv}$

(2): entropirate med massestrøm inn i CV, summert over alle innløp

(3): entropirate med massestrøm ut av CV, summert over alle utløp

(4): entropirate med alle varmestraumar inn i CV ($j = 1, 2, \dots$)

(5): entropiproduksjon inne i CV

Dersom temperaturen T_j varierer og varmeoverføringa $\delta\dot{Q}_j$ varierer med temperaturen, må vi integrerer brøken $\delta\dot{Q}_j/T_j$ over denne endringa. Dersom det er fleire varmestraumar ($j = 1, 2, \dots$), må vi summere bidraga frå alle.

7 Eksergibalanse

Eksergibalansen kan utleiast frå balansane for energi, entropi og masse. Det vil seie at han ikkje inneheld noko nytt, og at han kan erstatte éin av dei tre andre – i praksis vil vi velje mellom entropi og eksergi.

$$\underbrace{\frac{d\mathcal{E}_{cv}}{dt}}_{(1)} = \underbrace{\sum_{\text{innløp}} \dot{m}_i \varepsilon_{f,i}}_{(2)} - \underbrace{\sum_{\text{utløp}} \dot{m}_e \varepsilon_{f,e}}_{(3)} + \underbrace{\sum_j \int_{T_j} \left(1 - \frac{T_o}{T_j}\right) \delta\dot{Q}_j}_{(4)} - \underbrace{\left(\dot{W}_{cv} - p_o \frac{dV_{cv}}{dt}\right)}_{(5)} - \underbrace{T_o \dot{\sigma}_{cv}}_{(6)} \quad (11)$$

(1): tids-endring (auke, lagring) av eksergi i CV, jf. likning (12)

(2): eksergirate med alle massestraumar som kryssar systemgrensa inn til CV, jf. likning (14)

(3): eksergirate med alle massestraumar som kryssar systemgrensa ut av CV

(4): eksergirate med varmerate tilført CV, jf. likning (9)

(5): arbeidsrate avgjeve med stag, aksling, frå CV, jf. likning (8)

(6): irreversibilitetsrate (ekserginedbryting) inne i CV

Eksergien til massa inne i CV er

$$\mathcal{E}_{cv} = (U - U_o)_{cv} + p_o(V - V_o)_{cv} - T_o(S - S_o)_{cv} + E_{\text{kin},cv} + E_{\text{pot},cv} + \mathcal{E}_{cv}^{\text{ch}} \quad (12)$$

eller på massebasis

$$\varepsilon_{cv} = \frac{\mathcal{E}_{cv}}{m_{cv}} = (u - u_o)_{cv} + p_o(v - v_o)_{cv} - T_o(s - s_o)_{cv} + e_{\text{kin},cv} + e_{\text{pot},cv} + \varepsilon_{cv}^{\text{ch}} \quad (13)$$

og den spesifikke eksergien til masse som kryssar systemgrensa inn til CV:

$$\varepsilon_{f,i} = (h - h_o)_i - T_o(s - s_o)_i + \frac{1}{2}\vec{V}_i^2 + g(z - z_o)_i + \varepsilon_i^{\text{ch}} \quad (14)$$

og tilsvarande $\varepsilon_{f,e}$ for ut-traumar.

Entalpi og indre energi: Legg merke til at i energibalansen er det indre energi som står i endringsleddet, medan entalpi representerer energien til masse som kryssar systemgrensa. Dette viser seg att i eksergi-balansen også: Endringsleddet inneheld indre energi, medan eksergien til ein massetraum er uttrykt ved entalpi.

8 Utleiing av eksergibalansen

Kortversjonen: Vi kan sjå samanhengen mellom eksergibalansen og dei tre første balansane dersom vi skriv

$$\left(\frac{dE_{cv}}{dt} + p_o \frac{dV_{cv}}{dt} \right) - T_o \frac{dS_{cv}}{dt} - (u_o + p_o v_o - T_o s_o) \frac{dm_{cv}}{dt} = \frac{d\mathcal{E}_{cv}}{dt} \quad (15)$$

Her hugsar vi på at når T_o og p_o er konstante, er også u_o , v_o og s_o konstante. I denne omgangen ser vi dessutan bort frå kjemiske reaksjonar. Då må summen på venstre sida av likning (15) vere lik eksergi-endinga. Om vi brukar energibalansen i det første leddet, entropibalansen i det andre og massebalansen i det tredje, får vi likning (11). Dersom det er kjemiske reaksjonar i systemet, er utleiinga i prinsippet den same, berre noko meir omstendeleg og innvikla.